

دستاوردهایی از روش غربال اراتستن

دستاوردهای اول:

فرض کنید آدمی که اعداد اول را حفظ نیست، می‌خواهد با استفاده از روش غربال، اعداد اول کوچکتر از ۱۰۰۰۰۰۰ را پیدا کند. اعداد را می‌نویسد و کار را شروع می‌کند. ابتدا ۱ را خط می‌زند. بعد می‌رود سراغ ۲.

- او اعداد اول را حفظ نیست پس فعلاً شک دارد که ۲ اول است یا مرکب اما... کمی فکر می‌کند و جواب را پیدا می‌کند. او می‌تواند مطمئن باشد که ۲ عدد اول است چون غیر از ۱، عدد دیگری کوچکتر از ۲ وجود ندارد که بخواهد شمارنده‌ی ۲ بوده باشد. پس دور ۲ دایره می‌کشد و همه‌ی مضرب‌هایش (۴ و ۶ و ۸ و ...) را خط می‌زند.
حالا دوباره به ابتدای کار برمی‌گردد. تکلیف ۱ و ۲ که مشخص شده. حالا باید تکلیف ۳ مشخص شود!
- او اعداد اول را حفظ نیست اما خوب فکر می‌کند. او می‌تواند مطمئن باشد که ۳ عدد اول است. دقت کنید که مضرب‌های ۲ خط خورده ولی ۳ خط نخورده. پس مطمئناً ۳ شمارنده‌ای غیر از ۱ و ۳ ندارد. پس دور ۳ دایره می‌کشد و همه‌ی مضرب‌هایش را خط می‌زند و دوباره به ابتدای کار بر می‌گردد.
- او می‌تواند مطمئن باشد که ۵ اول است. چون مضرب‌های ۲ و ۳ را خط زده ولی ۵ هنوز خط نخورده پس ۵ مضرب‌ی از اعداد قبل از خودش نیست. پس ۵ شمارنده‌ای غیر از ۱ و خودش ندارد. پس دورش دایره می‌کشد و مضرب‌هایش را خط می‌زند.

هر بار که او مضرب عددی را خط می‌زند و دوباره بالا بر می‌گردد، همین استدلال را می‌تواند انجام دهد. نه؟؟

- مثلاً فرض کنید الان همه‌ی مضرب ۷۱ را خط زده و دوباره به ابتدای لیست رجوع کرده است. کافی است که او نگاه کند که اولین عدد باقی‌مانده چند است. بعله ۷۳ باقی مانده.
او می‌گوید: «احتیاجی نیست که من اعداد اول را حفظ باشم. الان مطمئنم که ۷۳ اول است. چون مضرب‌های ۲ و مضرب‌های ۳ و مضرب‌های ۵ و مضرب‌های همه‌ی اعداد کوچکتر از ۷۳ را خط زده‌ام اما خود ۷۳ هنوز خط نخورده. پس ۷۳ مضرب ۲ نبوده؛ ۷۳ مضرب ۳ نبوده؛ ۷۳ مضرب هیچ‌کدام از اعداد قبل از خودش نبوده. و این یعنی: ۷۳ اول است.»

نتیجه: در روش غربال اراتستن هر بار که مضرب عددی را خط می‌زنیم و دوباره به ابتدای لیست برمی‌گردیم، اولین عددی که می‌بینیم، بی‌شک اول است و اصلاً احتیاجی به فکر کردن ندارد. پس بی‌معطلی باید دورش دایره کشید و مضرب‌هایش را خط زد.

دستاوردهای دوم:

حتماً تا اینجای کار مشاهده کرده‌اید که

- وقتی می‌خواهیم مضرب ۲ را خط بزنیم، اولین عددی که خط می‌خورد، ۴ است.
 - وقتی می‌خواهیم مضرب ۳ را خط بزنیم، اولین عددی که خط می‌خورد، ۹ است.
 - وقتی می‌خواهیم مضرب ۵ را خط بزنیم، اولین عددی که خط می‌خورد، ۲۵ است.
 - وقتی می‌خواهیم مضرب ۷ را خط بزنیم، اولین عددی که خط می‌خورد، ۴۹ است.
- و ...

بیاید ببینیم چرا این اتفاق می‌افتد.

وقتی می‌خواهیم مضرب ۷ را خط بزنیم، باید سراغ 1×7 و 2×7 و 3×7 و ... برویم.

کدام‌ها خط خورده‌اند؟
لطفاً استدلال کاملی برای این ماجرا بنویسید.

نتیجه: در روش غربال اراتستن هر بار که می‌خواهیم مضارب یک عدد مثل p را خط بزنییم، اولین عددی که خط می‌خورد، $p \times p$ است.

دستاوردها:

- وقتی می‌خواهیم غربال را برای اعداد ۱ تا ۱۰ اجرا کنیم، باید مضارب ۲ و مضارب ۳ را خط بزنییم. اما دیگر لازم نیست مضارب ۵ را خط بزنییم چون اگر ۵ مضربی برای خط زدن داشته باشد، اولین مضرب، 5×5 خواهد بود که از ۱۰ بیشتر است. پس دیگر لازم نیست مضارب ۵ و مضارب ۷ را بررسی کنیم. در واقع بعد از خط زدن مضارب ۲ و ۳ مطمئنیم که همه‌ی اعداد باقی‌مانده اول هستند. در واقع کار را تا جایی ادامه می‌دهیم که از
- وقتی می‌خواهیم غربال را برای اعداد ۱ تا ۱۰۰ اجرا کنیم، باید مضارب ۲، مضارب ۳، مضارب ۵، مضارب ۷ را خط بزنییم. اما دیگر لازم نیست مضارب ۱۱ را خط بزنییم چون اگر ۱۱ مضربی برای خط زدن داشته باشد، اولین مضرب، 11×11 خواهد بود که از ۱۰۰ بیشتر است. پس دیگر لازم نیست مضارب ۱۱ و مضارب ۱۳ و مضارب ۱۷ و ... را بررسی کنیم. در واقع بعد از خط زدن مضارب ۲ و ۳ و ۵ و ۷ مطمئنیم که همه‌ی اعداد باقی‌مانده اول هستند.
- وقتی می‌خواهیم غربال را برای اعداد ۱ تا ۱۴۰ اجرا کنیم، باید مضارب ۲، مضارب ۳، مضارب ۵، مضارب ۷ و مضارب ۱۱ را خط بزنییم. اما دیگر لازم نیست مضارب ۱۳ را خط بزنییم چون اگر ۱۳ مضربی برای خط زدن داشته باشد، اولین مضرب، 13×13 خواهد بود که از ۱۴۰ بیشتر است. پس دیگر لازم نیست مضارب ۱۳ و مضارب ۱۷ و ... را بررسی کنیم. در واقع بعد از خط زدن مضارب ۲ و ۳ و ۵ و ۷ و ۱۱ مطمئنیم که همه‌ی اعداد باقی‌مانده اول هستند.

در واقع در غربال ۱ تا ۱۰، می‌دانیم که 5×5 از ۱۰ بیشتر می‌شود پس مضربی برای خط زدن نخواهد داشت.
در واقع در غربال ۱ تا ۱۰۰، می‌دانیم که 11×11 از ۱۰۰ بیشتر می‌شود پس مضربی برای خط زدن نخواهد داشت.
در واقع در غربال ۱ تا ۱۴۰، می‌دانیم که 13×13 از ۱۴۰ بیشتر می‌شود پس مضربی برای خط زدن نخواهد داشت.

نتیجه: در غربال ۱ تا n اعدادی که مضربی برای خط زدن دارد، حتماً از \sqrt{n} کمتر هستند.

به نتیجه‌ی بالا خوب فکر کنید و اگر لازم به توضیح است، برای خودتان توضیح بنویسید.